Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 515.164

Мельникова Ирина Анатольевна

Компактные слоения морсовских форм

(01.01.04 — геометрия и топология)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 1995

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор А.С.Мищенко

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, доцент А.В.Болсинов

доктор физико-математических наук, с.н.с. А.Н.Старков

Ведущая организация: Математический институт им. В.А.Стеклова РАН

Защита диссертации состоится «1» марта 1996 г. в 16 час. 05 мин. на заседании диссертационного совета Д.053.05.05 по математике при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносоа по адресу 119899, ГСП, Москва, Воробьевы горы, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико—математического факультета МГУ (14 этаж).

Автореферат разослан «1» февраля 1996 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.053.05.05 при МГУ,
доктор физико-математических наук
профессор В.Н.Чубариков

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Настоящая работа относится к теории слоений с особенностями на замкнутых многообразиях. В 1982 году С.П.Новиковым была поставлена задача об изучении топологической структуры поверхностей уровня морсовских форм. В последние годы топологическая структура таких поверхностей активно изучалась разными авторами в связи со степенью иррациональности $\operatorname{dirr}\omega$ формы ω; в частности, для случая $\operatorname{dirr}\omega = 0$, было показано, что слоение такой формы компактно. В связи с этим возникает задача изучения характеристик компактного слоения морсовской формы. В настоящей работе рассматриваются компактные слоения, порожденные замкнутыми 1-формами с морсовскими особенностями.

Цель работы: исследовать свойства морсовских форм, определяющих компактные слоения, в частности:

1) Сформулировать признак компактности слоения в гомологических терминах.

2) Изучить связь степени иррациональности формы с компактностью слоения.

3) Исследовать свойства особых точек морсовской формы, заданной на замкнутом многообразии и определяющей компактное слоение.

4) Исследовать связь степени иррациональности $\operatorname{dirr}\omega$ с числом особых точек индекса 0 и 1.

Методы исследования. Используются методы алгебраической топологии, топологии многообразий и теории графов.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и заключаются в следующем.

1) Доказан признак компактности слоения морсовской формы. Показано, что в двумерном случае он дополняется до критерия.

2) Доказана некомпактность слоения морсовской формы общего положения.

3) Получена точная верхняя оценка на степень иррациональности морсовской формы, определяющей компактное слоение.

4) Получено неравенство, связывающее степень иррациональности морсовской формы, определяющей компактное слоение, с числом особых точек индекса 0 и 1.

5) Получено неравенство, связывающее индексы особых точек морсовской формы. В терминах особых точек формы доказано условие, обеспечивающее точность этой формы.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть полезны специалистам, работающим в области слоений с особенностями и теории морсовских форм.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на научно-исследовательском семинаре по топологии и анализу под руководством профессора А.С.Мищенко, а также на Александровских чтениях (1995 г.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в пяти работах, список которых представлен в конце автореферата.

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, включающих в себя 12 параграфов, и списка литературы. В тексте диссертации приведено 6 рисунков. Список литературы содержит 34 наименования. Общий объем диссертации — 80 страниц.

Содержание работы

Во введении дан обзор результатов работ, связанных с темой диссертации, и сформулированы основные результаты диссертации.

В главе 1 вводятся основные определения и доказывается признак компактности слоения морсовской формы.

В §1 вводится понятие особого и неособого слоя слоения $\mathcal{F}_\omega$, определяемого морсовской формой ω, а также подгруппа $H_\omega \subset H_{n-1}(M^n)$, порожденная неособыми компактными слоями слоения $\mathcal{F}_\omega$. Подгруппа H_ω является важной характеристикой слоения $\mathcal{F}_\omega$, свойства которой тесно связаны с компактностью слоения в целом.

Рассматривается отображение пересечения $(n-1)$ – мерных гомологических классов: $H_{n-1}(M^n) \times H_{n-1}(M^n) \to H_{n-2}(M^n)$. Подгруппа в группе $H_{n-1}(M^n)$, на которой пересечение гомологических классов тривиально, называется изотропной относительно этого отображения. Заметим, что подгруппа H_ω, порожденная компактными слоями, является изотропной. Далее приводятся верхние и нижние оценки на ранг максимальной изотропной подгруппы $h_0(M)$. Вычисляются значения $h_0(M)$ для конкретных многообразий: $h_0(M_g^2) = g$, $h_0(T^n) = 1$.

В §2 доказывается основной результат первой главы — признак компактности слоения морсовской формы.

Теорема 1.1. *Если подгруппа H_ω является максимальной изотропной подгруппой относительно операции пересечения гомологических классов, то слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно.*

Согласно доказанной теореме, если существует $h_0(M)$ компактных гомологически независимых слоев, то все слои компактны. В частности, для компактности слоения морсовской формы на M_g^2 достаточно существования g гомологически независимых компактных слоев.

В §3 показано, что если размерность многообразия $n > 2$, то утверждение, обратное к теореме 1.1, в общем случае неверно: существуют компактные слоения, у которых подгруппа H_ω, порожденная компактными слоями, не является максимальной. Приведен пример в размерности три. Показано, как обобщается приведенная конструкция на размерность $n > 3$.

В §4 в случае размерности два доказано, что этот признак является критерием (теорема 1.2) при условии, что на каждом особом слое лежит ровно одна особая точка. Приведен пример, показывающий, что последнее условие является существенным.

С.П.Новиковым[1] было введено понятие степени иррациональности $\operatorname{dirr}\omega$ замкнутой 1-формы (число несоизмеримых периодов формы минус 1). Очевидно, $\operatorname{dirr}\omega \leq \operatorname{rk} H_1(M)$. В качестве следствия из теоремы 1.2 получена оценка на степень иррациональности формы, определяющей компактное слоение на M_g^2.

Теорема 1.3. *Если слоение на M_g^2, определяемое морсовской формой ω, компактно, то* $\operatorname{dirr}\omega \leq g-1$.

Заметим, что в этой теореме условие на число особых точек, лежащих на особом слое, не является существенным, что доказывается во второй главе.

В главе 2 изучаются компактные слоения морсовской формы, доказывается оценка на степень иррациональности морсовской формы, определяющей компактное слоение.

В §1 строится разбиение многообразия, обладающего компактным слоением морсовской формы, на множества V_i, которые являются замыканиями максимальных цилиндрических окрестностей неособых слоев: $V_i = \overline{\mathcal{O}(\gamma_i)}$ (теорема 2.1). При этом окрестность $\mathcal{O}(\gamma_i)$ неособого слоя γ_i состоит из диффеоморфных ему слоев.

[1]Новиков С.П., Гамильтонов формализм и многозначный аналог теории Морса, УМН, 1982, т.37, вып.5

В §2 с помощью построенного разбиения получена оценка на степень иррациональности морсовской формы, определяющей компактное слоение.

Теорема 2.2. *Если слоение $\mathcal{F}_\omega$, определяемое на многообразии M морсовской формой ω, компактно, то* $\operatorname{dirr}\omega \leq \operatorname{rk} H_\omega - 1$.

Заметим, что число особых точек, лежащих на особом слое, может быть произвольным. Точность полученной оценки доказывается в §3.

В §3 доказывается точность верхней оценки, полученной в теореме 2.2 и некоторые следствия.

В пункте §3.1 доказывается признак существования некомпактного слоя.

Следствие 2.1 *Если на многообразии M слоение $\mathcal{F}_\omega$ определяется морсовской формой ω и* $\operatorname{dirr}\omega \geq h_0^{max}$, *то слоение имеет некомпактный слой.*

В частности, слоение морсовской формы на M_g^2 имеет некомпактный слой, если $\operatorname{dirr}\omega \geq g$.

В пункте §3.2 доказывается точность верхней оценки, что вытекает из следующего утверждения.

Теорема 2.3 *Пусть $\mathcal{F}_\omega$ — компактное слоение, определяемое морсовской формой ω. Тогда, для любого целого p такого, что $0 \leq p \leq \operatorname{rk} H_\omega - 1$, существует замкнутая морсовская форма ω' степени иррациональности* $\operatorname{dirr}\omega' = p$, *определяющая то же самое слоение $\mathcal{F}_{\omega'} = \mathcal{F}_\omega$.*

Следствие 2.3. *Оценка на степень иррациональности морсовской формы, определяющей компактное слоение, которая была получена в теореме 2.2, является точной в следующем смысле: существует форма* ω' *такая, что* $\operatorname{dirr}\omega' = \operatorname{rk} H_\omega - 1$ *и* $\mathcal{F}_{\omega'} = \mathcal{F}_\omega$.

В пункте §3.3 доказан критерий компактности слоения.

Следствие 2.4 *Слоение* $\mathcal{F}_\omega$*, определяемое морсовской формой, компактно в том и только том случае, когда существует функция* $f : M \to \mathbb{R}\backslash 0$ *такая, что* $df \wedge \omega = 0$ *и* $\operatorname{dirr}(f(x)\omega) = 0$.

В пункте §3.4 показано, что если на многообразии M^n отображение пересечения $(n-1)$ – мерных гомологических классов не тождественно нулевое, то слоение морсовской формы общего положения имеет некомпактный слой (теорема 2.4). Приведен пример многообразия с нулевым пересечением гомологических классов, на котором слоение морсовской формы общего положения компактно.

В главе 3 рассматриваются особые точки морсовской формы ω и их связь с топологией слоения $\mathcal{F}_\omega$.

В §1 приводятся основные понятия, касающиеся особых точек морсовской формы.

Определение 3.1. *Пусть* p *— особая точка морсовской формы* ω *и* $x^1, \dots, x^n$ *— координаты в окрестности* p *такие, что*

$$\omega = \sum_{i=1}^{\lambda} x^i dx^i - \sum_{i=\lambda+1}^{n} x^i dx^i$$

Индексом $\operatorname{ind} p$ *особой точки* p *называется число* $\min(\lambda, n-\lambda)$.

Обозначим Ω_i — множество особых точек индекса i.

В §2 рассматриваются особые точки индекса 1 и доказываются технические леммы.

В §3 замыканию множества U неособых компактных слоев ставится в соответствие граф, вершинами которого являются компоненты связности пересечения множества $\overline{U}$ с особыми слоями. Степень вершины графа оценивается через число особых точек индекса 0 и 1, лежащих на соответствующем особом слое.

В §4 рассматривается связь характеристик компактного слоения с числом особых точек индекса 0 и 1. С помощью ассоциированного графа компактных слоев доказываются следующие оценки:

Теорема 3.2. *Пусть слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно, тогда*

$$\operatorname{rk} H_\omega \leq \frac{1}{2}(|\Omega_1| - |\Omega_0|) + 1.$$

Теорема 3.3. *Если слоение морсовской формы ω компактно, то*

$$\operatorname{dirr} \omega \leq \frac{1}{2}(|\Omega_1| - |\Omega_0|).$$

В §5 рассматриваются особые точки произвольных (не обязательно компактных) слоений.

Теорема 3.4. *Пусть ω — морсовская форма, тогда*
1) $|\Omega_0| \leq |\Omega_1| + 2$
2) Если $|\Omega_0| > |\Omega_1|$, то слоение $\mathcal{F}_\omega$ определяемое этой формой, компактно, более того, форма ω точна: $\omega = df$.

Если особые точки морсовской формы ω удовлетворяют неравенству $|\Omega_1| - 1 \leq |\Omega_0| \leq |\Omega_1|$, то справедлив следующий критерий (теорема 3.5): слоение, определяемое этой формой, компактно тогда и только тогда, когда $\operatorname{dirr} \omega \leq 0$.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю профессору А.С.Мищенко за постоянное внимание к работе и полезные обсуждения.

Список опубликованных работ по теме диссертации

1. Мельникова И.А., Признак некомпактности слоения на M_g^2 // Матем. заметки, 1993. т.53, N3. с.158-160.

2. Мельникова И.А., Признак некомпактности слоения морсовской формы // УМН, 1995, т.50, вып.3, с.217-218.

3. Мельникова И.А., Признак компактности слоения // Матем. заметки, 1995. т.58, N6, с.872-877.

4. Мельникова И.А., Максимальные изотропные подпространства кососимметрического билинейного отображения // М: МГУ, 1995. Деп. ВИНИТИ № 3297 В-95.

5. Мельникова И.А., Особые точки морсовской формы и слоения // М: МГУ, 1995. Деп. ВИНИТИ № 3298 В-95.