5. Ferapontov E. V. On the integrability of 3x3 semihamiltonian hydrodynamic type systems which do not possess Riemann invariants//Physica D. 1993. 63. 50—70.

Поступила в редакцию 07.06.95

БЮТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1. МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1996. № 4

УДК 515.164

И. А. Мельникова

ОСОБЫЕ ТОЧКИ МОРСКОЙ ФОРМЫ И СЛОЕНИЯ

В статье изучаются особые точки морской формы $\omega$ и их связь с со слоением $\mathcal{F}_\omega$, определяемым этой формой.

В п. 1 приводятся необходимые определения. В п. 2 показывается, что число гомологически независимых слоев компактного слояния $\mathcal{F}_\omega$ и степень иррациональности формы $\omega$ определяются соотношением чисел особых точек индекса 0 и 1. В п. 3 для произвольной морской формы приводится соотношение между числами особых точек индекса 0 и 1, а также связанные с ним признаки компактности слояния.

1. Основные определения. Рассмотрим гладкое компактное связное ориентируемое $n$-мерное многообразие $M$ и определенную на нем замкнутую 1-форму $\omega$ с морскими особенностями; такую форму мы называем морской. Обозначим множество ее особых точек через $\text{Sing } \omega$. Замкнутая форма $\omega$ определяет на множестве $M \setminus \text{Sing } \omega$ слоение $\mathcal{F}$ коразмерности 1.

Определим на многообразии $M$ слоение с особенностями $\mathcal{F}_\omega$ следующим образом.

Пусть в окрестности особой точки $p \in \text{Sing } \omega$ слоение $\mathcal{F}$ локально определяется уровнями функции $f_p$, причем $f_p(p) = 0$. Очевидно, что $f_p^{-1}(0) \setminus p \subset \bigcup \gamma_i$, где $\gamma_i \in \mathcal{F}$.

Слон $\gamma \in \mathcal{F}$ называется неособым слоем $\mathcal{F}_\omega$, если $\forall p \in \text{Sing } \omega \gamma \cap \bigcap f_p^{-1}(0) = \emptyset$.

Обозначим $F_p = p \cup \{\gamma \in \mathcal{F} \mid \gamma \cap f_p^{-1}(0) \neq \emptyset\}$. Пусть $F = \bigcup_{p \in \text{Sing } \omega} F_p$.

Особым слоем $\gamma_0$ слоения $\mathcal{F}_\omega$ называется максимальная связная компонента множества $F$.

Слоение называется компактным, если все его слои компактны.

Сопоставим каждому неособому компактному слою $\gamma \in \mathcal{F}_\omega$ его гомологический класс $[\gamma]$. Образ множества неособых компактных слоев при этом отображении порождает подгруппу в $H_{n-1}(M)$. Обозначим ее $H_{\omega}$.

Пусть $p$ — особая точка морской формы $\omega$ и $x^1, ..., x^n$ — координаты в окрестности $p$, такие что

$$\omega = \sum_{i=1}^{\lambda} x^i dx^i - \sum_{i=\lambda+1}^n x^i dx^i.$$
Индексом ind $p$ особой точки $p$ называется число $\min (\lambda, n-\lambda)$ [1]. Обозначим через $\Omega_i$ множество особых точек индекса $i$.

Степень иррациональности формы $\omega$ называется число

$$\text{det} \omega = r_k \left( \sum_{z_1, \ldots, z_m} \omega \right) = 1,$$

где $z_1, \ldots, z_m$ — базис в $H_1(M)$ [2].

2. Особые точки компактного слоения. Рассмотрим особую точку $p \in M$. В некоторой окрестности точки $p$ форма $\omega$ точна, и, следовательно, слоение $\mathcal{F}$ в этой окрестности определяется поверхностями уровня некоторых функций $f, f(p) = 0$. Если $\text{ind} p \neq 1$, то все поверхности уровня функции $f$ локально линейно связны. Если $\text{ind} p = 1$, то для малого $\varepsilon > 0$ локально в окрестности точки $p$ поверхность уровня $f_\varepsilon$ (или $f_{-\varepsilon}$) функции $f$ является двуполостным гиперболоидом и имеет локально две компоненты связности.

Пусть $\gamma_0 \in \mathcal{F}$ — компактный особый слой. Функция $f$, уровнями которой локально задается слоение, может быть определена в окрестности всего слоя $\gamma_0$, причем для достаточно малого $\varepsilon$ множество $W = \{ f = 1 - \varepsilon, \varepsilon \}$ не содержит других особых слоев. Нетрудно показать, что если $f_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^{k_+} \gamma_i^+$ и $f_{-\varepsilon} = \bigcup_{i=1}^{k_0} \gamma_i^-$, то особый слой содержит не менее $k + s - 2$ особых точек из $\Omega_i$. В частности, если $\gamma_0 \cap \Omega_i = \emptyset$, то поверхности уровня связны: $f_\varepsilon = \gamma_i^+$ и $f_{-\varepsilon} = \gamma_i^-$. Заметим, что поскольку $\partial W = f_\varepsilon \cup f_{-\varepsilon}$, поверхности уровня $f_\varepsilon$ и $f_{-\varepsilon}$ гомологичны:

$$\Sigma [\gamma_i^+] - \Sigma [\gamma_i^-] = 0. \quad (1)$$

Таким образом, гомологический класс слоя может изменяться только при переходе через особый слой, содержащийся из $\Omega_i$, т. е. если $[\gamma_i^+] \neq [\gamma_i^-]$, то $\gamma_0 \cap \Omega_i = \emptyset$. Особая точка из $\Omega_0$ порождает гомологически тривиальный слой.

Пусть $\text{Sing} \omega \neq \emptyset$. Рассмотрим $U$ — множество всех особых компактных слоев, оно представляется в виде $U = \bigcup \mathcal{C}(\gamma)$, где $\mathcal{C}(\gamma)$ — максимальная цилиндрическая окрестность неособого компактного слоя $\gamma$, состоящая из диффеоморфных ему слоев. Число цилиндров $\mathcal{C}(\gamma)$ конечно, поскольку каждая особая точка лежит в крае не более чем четырех цилиндров. Следовательно, $\overline{U} = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$, где $V_i = \overline{\mathcal{O}(\gamma_i)}$. Если слоение $\mathcal{F}$ компактно, то, как показано в работе [3], определено разбиение всего многообразия $M$ на множества $V_i$. Край $\partial V_i$ лежит в объединении особых слоев $\gamma_0$.

Сопоставим множеству $U$ конечный граф $\Gamma$, при этом множествам $V_i$ будут соответствовать ребра графа, а компонентам связности пересечения $\gamma_0 \cap \mathcal{U}$ — вершины, где $\gamma_0$ — особый слой. Ребро $V_i$ инцидентно вершине $\gamma_0 \cap \mathcal{U}$, если $\partial V_i \cap \gamma_0 \neq \emptyset$. Граф $\Gamma$ назовем ассоциированным графом множества компактных слоев.

Граф $\Gamma$ имеет два типа вершин:

1) $\gamma_0 \cap \mathcal{U} = \gamma_0$, т. е. особый слой является компактным. Если $\gamma_0 \cap \Omega_0 = \emptyset$, то соответствующая вершина имеет степень 1. Если $[\gamma_0 \cap \Omega_1] = \emptyset$, то вершина имеет степень не больше, чем $m + 2$. Если $\gamma_0 \cap \Omega_1 = \emptyset$, то вершина имеет степень 2;

2) $\gamma_0 \cap \mathcal{U} = \emptyset$, т. е. особый слой некомпактен. Нетрудно показать, что если $[\gamma_0 \cap \Omega_1] = m + 1$, то вершина имеет степень не больше, чем $m$. 38
Если слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно, то граф $\Gamma$ является связным. В общем случае он может иметь несколько компонент связности.

Введем ориентацию на графе $\Gamma$. Поскольку множество $\text{Int}V_i$ не содержит особых точек и в нем $\omega=df_i$, то определено направление роста функции $f_i$; выберем ориентацию на графе $\Gamma$ в соответствии с направлениями роста функций $f_i$. Заметим, что так выбранная ориентация согласована с выбором знаков в выражении (1).

**Теорема 1.** Пусть слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно, тогда

$$\text{rk} H_\omega \leq \frac{1}{2} (|\Omega_1| - |\Omega_0|) + 1.$$  

**Доказательство.** Если $\text{Sing} \omega = \emptyset$, то все слои гомологичны, $\text{rk} H_\omega = 1$ и утверждение теоремы выполнено.

Пусть $\text{Sing} \omega \neq \emptyset$, тогда для слоения $\mathcal{F}_\omega$ определен ассоциированный граф $\Gamma$. Поскольку слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно, граф $\Gamma$ является связным. Каждая его вершина определяет линейное уравнение (1), связывающее гомологические классы слоев $\gamma_i \in V_i$, а весь граф $\Gamma$ определяет систему из $P$ таких уравнений с $Q$ неизвестными, где $P$ — число вершин графа, $Q$ — число ребер. Ранг $\text{rk} H_\omega$ равен рангу пространства решений этой системы. Матрицей системы является матрица инцидентности связного графа $\Gamma$ размерности $P \times Q$, ранг которой по теореме 13.6 [4] равен $P - 1$, следовательно, $\text{rk} H_\omega = Q - P + 1$.

Пусть $k_i$ — число вершин степени $i$, тогда $P = \sum_{i \geq 0} k_i$ и по теореме 2.1 [4] $2Q = \sum_{i \geq 0} i k_i$. С другой стороны, $k_1 = |\Omega_1|$ и $\sum_{i \geq 1} (i - 2) k_i \leq |\Omega_1|$.

**Теорема 1 доказана.**

Согласно [3] для компактного слоения морской формы $\text{dirr} \omega \leq \text{rk} H_\omega - 1$, таким образом, доказана следующая

**Теорема 2.** Если слоение морской формы $\omega$ компактно, то

$$\text{dirr} \omega \leq \frac{1}{2} (|\Omega_1| - |\Omega_0|).$$

3. Некомпактные слоения. Из теоремы 1 следует, что для компактного слоения $|\Omega_0| < |\Omega_1| + 2$. Обобщим этот результат на случай произвольного слоения морской формы.

**Теорема 3.** Пусть $\omega$ — морская форма. Тогда

1) $|\Omega_0| < |\Omega_1| + 2$;
2) если $|\Omega_0| > |\Omega_1|$, то $\omega=df$, слоение $\mathcal{F}_\omega$ компактно и $\text{rk} H_\omega = 0$.

**Доказательство.** В случае $\Omega_0 \neq \emptyset$ утверждение теоремы очевидно выполнено.

Пусть $\Omega_0 \neq \emptyset$. Заметим, что первое утверждение теоремы непосредственно следует из второго и теоремы 1. Докажем второе утверждение теоремы. Пусть $|\Omega_0| > |\Omega_1| > 0$.

Рассмотрим $U$ — множество неособых компактных слоев. Так как $\Omega_0 \neq \emptyset$, то $U \neq \emptyset$ и определен ассоциированный граф $\Gamma$. Пусть $N_i$ — компоненты связности множества $U$, соответственно $U = N_1 \cup \ldots \cup N_k$.

Поскольку $\Omega_0 \subset \cup N_i$, то для некоторого $N_i$, скажем для $N_1$, выполняется неравенство $|\Omega_0||N_1| > |\Omega_1||N_1|$. Пусть $\Gamma_1$ — компонента связности графа $\Gamma$, соответствующая множеству $N_1$.

Граф $\Gamma_1$ может иметь:

1) $m$ вершин, соответствующих особым точкам индекса 0, степень такой вершины равна 1;
2) с вершин, соответствующих компактным особым слоям, лежащим в \( U \), степень такой вершины больше 1. Обозначим через \( s_i \) число таких вершин степени \( i \), \( s = \sum_{i>1} s_i \). Как было показано в п. 2, число особых точек из \( \Omega_1 \), соответствующих этим вершинам, не меньше, чем \( \sum_{i>1} (i-2) s_i \).

3) \( t \) вершин, соответствующих некомпактным особым слоям. Обозначим через \( t_i \) число таких вершин степени \( i \), \( t = \sum_{i>0} t_i \). Как было показано в п. 2, число особых точек из \( \Omega_1 \), соответствующих этим вершинам, не меньше, чем \( \sum_{i>0} it_i \).

Таким образом, неравенство \( \mid\Omega_0 \cap N_1\mid > \mid\Omega_1 \cap N_1\mid \) переписывается следующим образом:

\[
m > \sum_{i>1} (i-2) s_i + \sum_{i>0} it_i.
\]

С другой стороны, согласно теореме 2.1 [4] и следствию 4.5 (а) [4] для связного графа, число вершин степени \( i \) которого равно \( p_i \), справедливо неравенство \( \sum_{i>1} (i-2) p_i + 2 \geq 0 \), что для графа \( \Gamma \) записывается в виде

\[
\sum_{i>1} (i-2) s_i + \sum_{i>0} (i-2) t_i - m + 2 \geq 0.
\]

Сопоставление этих двух неравенств дает \( 2t - \sum_{i>0} t_i < 2 \), т. е. \( t = 0 \).

Следовательно, \( \partial N_1 = \emptyset \), так как компактные особые слои не могут лежать в крае \( N_1 \). Поскольку многообразие \( M \) связно, то \( M = N_1 \) и слоение \( \mathcal{F}_\omega \) компактно. В силу теоремы 2 имеем \( \text{d}_\omega \omega = -1 \), т. е. \( \omega = d\tilde{\omega} \).

Согласно теореме 1 получаем \( r_\omega = 0 \). Теорема 3 доказана.

Нет, если \( \mid\Omega_0\mid < \mid\Omega_1\mid \), то слоение компактно. Рассмотрим случай, когда \( \mid\Omega_0\mid < \mid\Omega_1\mid < \mid\Omega_0\mid + 1 \).

Теорема 4. Пусть \( 0 < \mid\Omega_1\mid - \mid\Omega_0\mid \leq 1 \). Слоеие \( \mathcal{F}_\omega \) компактно тогда и только тогда, когда \( \text{d}_\omega \omega \leq 0 \).

Доказательство. Если \( \text{d}_\omega \omega < 0 \), то слоение \( \mathcal{F}_\omega \) компактно согласно [2]. Обратно, пусть слоение \( \mathcal{F}_\omega \) компактно. Тогда по теореме 2 имеем \( \text{d}_\omega \omega \leq \frac{1}{2} (\mid\Omega_1\mid - \mid\Omega_0\mid) \). Теорема 4 доказана.

Автор выражает благодарность профессору А. С. Мищенко за постоянное внимание к работе и полезные замечания.

Работа выполнена при частичной поддержке Международного научного фонда и правительства Российской Федерации, грант N MGM300.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

2. Н. Н. Ч. О. С. П. Гамильтонов формализм и многообразный аналог теории Морса//Журнал матем. наук. 1982. 37. вып. 5. 3–49.

Поступила в редакцию 09.06.96